**TEOREMA MESTRE E EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA**

**LISTA DE EXERCÍCIOS**

O **Teorema Mestre** é uma ferramenta usada para resolver recorrências da forma:

**Forma geral:**

onde: **Caso Particular:**

* **a** ≥ 1 é o número de subproblemas;
* **b** > 1 é o fator de divisão do tamanho do problema;
* **f(n)** é o custo do trabalho fora das chamadas recursivas.
  + - * **Caso 1: se a > bk**, então T(n) =
      * **Caso 2: se a = bk**, então T(n) =
      * **Caso 3: se a < bk, então T(n) =**

**Nota**: Essa forma **só funciona** **nesse caso específico** em que . Mas **não é o Teorema Mestre completo**, apenas um **caso particular**.

**Critério de comparação é entre e nlogba**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Caso** | **Condição sobre f(n)** | **Solução T(n)** | **Situação** |
| **1** | **f(n) = O(nlogb a -** ε**)** | **Θ** **(nlogb a)** | **Recursão domina** |
| **2** | **f(n) = Θ** **(nlogb a . logk n)** | **Θ (nlogb a . logk+1 n)** | **Empate** |
| **3** | **f(n) = Ω** **(nlogb a +** ε**), reg.** | **Θ** **(f(n))** | **Termo externo domina** |

**Exercício 1 – Aplicação direta do Teorema Mestre**

Resolva a recorrência:

**Exercício 2 – Comparação com caso limite**

Determine a complexidade assintótica de:

**Exercício 3 – Caso logarítmico**

Resolva a recorrência:

**Exercício 4 – Custo constante adicional**

Resolva a recorrência:

**Exercício 5 – Divisão desigual**

Determine a complexidade de:

**Exercício 6 – Recorrência sem Teorema Mestre direto (não se encaixa)**

Resolva (ou explique por que não se aplica o Teorema Mestre):

**Exercício 7 – Análise por árvore de recursão**

Construa a **árvore de recursão** e determine a complexidade assintótica de:

**Exercício 8 – Custo polinomial e múltiplas subchamadas**

Determine para:

**Exercício 9 – Recorrência dominada pelo custo externo**

Resolva:

**Exercício 10 – Desafio**

Classifique a complexidade (**sem necessariamente resolver completamente**) de:

**GABARITO / SOLUÇÕES**

| **Exercício Resolução / Resultado** | |
| --- | --- |
| **1** | .  .  ⇒ **Caso 2** → . |
| **2** | .  . Como com ⇒ **Caso 3** → . |
| **3** | .  .  ⇒ **limite do Caso 2** → . |
| **4** | .  . Como cresce mais lento ⇒ **Caso 1** → . |
| **5** | Forma não padrão (não divide igualmente), mas o custo decresce geometricamente.  Aproximação: . |
| **6** | Não se aplica o Teorema Mestre (divisão não é por constante).  Solução direta: . |
| **7** | Árvore de recursão:  Nível 0: n  Nível 1: n/2  Nível 2: n/4 ... até log₂n níveis.  Soma total: + log n níveis → **O(n)**. |
| **8** | .  .  ⇒ **Caso 2** → . |
| **9** | .  .  Igual ⇒ **Caso 2** → . |
| **10** | .  . Como cresce mais → **Caso 3** → . |

**Observações para o aluno**

* O Teorema Mestre **não se aplica** quando:
  + o tamanho do subproblema **não é fração constante de n** (ex: );
  + ou quando **a divisão não é uniforme**.
* Sempre compare o crescimento de com para determinar qual caso usar:
  + **menor** → **Caso 1**
  + **igual** → **Caso 2**
  + **maior** → **Caso 3**